Конспект к лекции 6. (Санкт-Петербург, 15 апреля 2017 г.)

14 Классические произведения графов

Напомним, что мы уже встречались с некоторым способом умножения графа на самого себя. Возведением графа G в степень k называется следующая операция: мы сохраняем прежнее множество вершин, а рёбрами в новом графе считаем все пути длины k в исходном графе. Результат возведения графа в степень k мы обозначаем G^k. Если исходный граф был однородным степени d, то его k-ая степень будет также однородным графом, но степени d^k. Если M — матрица исходного графа, то матрицей его k-ой степени будет будет M^k (обычное возведение матрицы в степень k). При этом, разумеется, собственные векторы матрицы сохраняются, а собственные числа также возводятся в степень k.

Нетрудно также определить тензороное произведение графов. Для произвольных графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ назовём их *тензороным произведением* граф $G = (V, E)$, в котором множество вершин $V = V_1 \times V_2$ (каждая вершина в новом графе есть пара вершин исходных графов), а рёбрами соединяются все такие пары (v_1, v_2) и (v_1', v_2'), для которых

$$\{v_1, v_1'\} \in E_1 \text{ и } \{v_2, v_2'\} \in E_2.$$

Тензорное произведение графов G_1 и G_2 мы обозначаем $G_1 \otimes G_2$.

Упражнение 14.1 *Объясните, как из матриц графов G_1 и G_2 получить матрицу тензорного произведения $G_1 \otimes G_2$.*

Упражнение 14.2 *Пусть спектр графа G_1 состоит из чисел*

$$\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \ldots, \lambda_{1,n},$$

а спектр граф G_2 состоит из чисел

$$\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}, \ldots, \lambda_{2,m}.$$

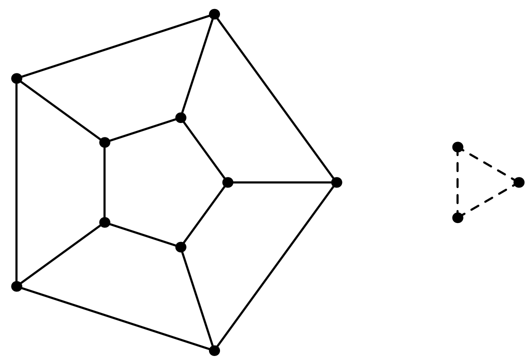
Докажите, что спектр $G_1 \otimes G_2$ состоит из всевозможных произведений $(\lambda_{1,i} \cdot \lambda_{2,j})$.

Далее в этой главе мы определим более сложные операции на графах — зигзаг-произведение и подстановочное произведение. Используя эти операции (вместе с тензорным произведением и обычным возведением в степень) мы сможем строить экспандеры сколь угодно большого размера из маленьких «строительных блоков».

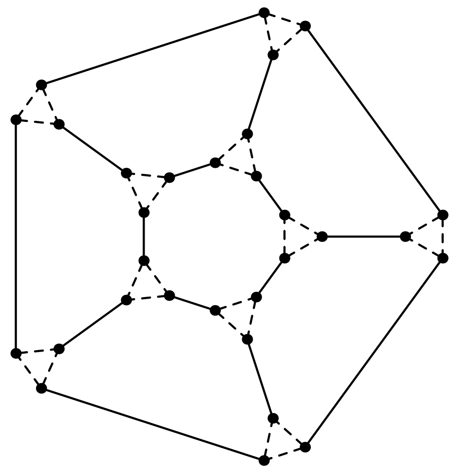
15 Зигзаг-произведение графов

В этой главе мы изучим метод, позволяющий получать экспандеры с хорошими параметрами с помощью особого «произведения» графов. Это произведение позволяют «собирать» большие спектральные экспандеры из маленьких блоков (а подходящего вида маленькие блоки, которые и сами должны быть эспандерами, мы можем найти перебором.)

Пусть даны два графа $G(n, D)$ и $H(D, d)$. Запись в скобках указывает параметры: число вершин и степень каждой вершины (одинаковую для всех вершин). Пусть при этом число вершин второго графа равно степени первого (как в примере на рисунке).



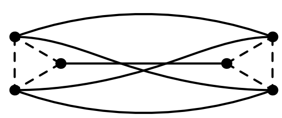
Мы определим *зигзаг-произведение* этих графов. Для этого каждую вершину первого графа заменим маленькой копией второго графа, прикрепив рёбра первого графа к вершинам второго. (В маленьком графе как раз нужное число вершин.) Обратим внимание, что в прикреплении есть произвол — конкретный выбор соответствия в каждой вершине не играет роли. Получится граф с nD вершинами и рёбрами двух типов — большими рёбрами, унаследованными из из первого графа, и малыми , унаследованными из второго. (На рисунке — сплошные и пунктирные линии соответственно.)



Зигзаг-произведение (zig-zag product): Вершины у зигзаг-произведения будут те же, но рёбра совсем другие. В качестве рёбер нового графа мы берём все пути длины 3 вида

[пунктирное ребро] – [сплошное ребро] – [пунктирное ребро].

Другими словами, каждое сплошное ребро порождает d^2 рёбер зигзаг-произведения (соединяющих пары пунктир-соседей концов сплошного ребра), как показано на рисунке (рёбра зигзаг-произведения показаны кривыми линиями):



Легко видеть, что все вершины зигзаг-произведения имеют степень d^2 (каждое из двух пунктирных рёбер можно выбрать d способами).

Опишем матрицу графа, полученного в результате зигзаг-произведения. Для этого мы рассмотрим две матрицы размера $nD \times nD$ (координаты соответствуют вершинам графа). Первая матрица $\tilde{H}$ есть матрица графа с рёбрами из пунктирных линий, вторая матрица $\tilde{G}$ соответствует графу с теми же вершинами, но с рёбрами из сплошных линий. (Обозначения показывают, что эти матрицы происходят из соответственно первого и второго графов, участвующих в зигзаг-произведении). В $\tilde{H}$ каждый столбец и каждая строка содержат d единиц, а в $\tilde{G}$ — только одну единицу. Отметим, что $\tilde{G}$ задаёт перестановку на множестве вершин, и её норма равна единице. Ясно, что матрицей зигзаг-произведения будет произведение матриц $\tilde{H}\tilde{G}\tilde{H}$. Ниже мы докажем оценку для второго собственного числа зигзаг-произведения.

16 Спектральная оценка для зигзаг-произведения

В этом параграфе мы докажем оценку для второго собственного числа спектрального произведения в предположении, что в исходных графах второе собственное число *хотя бы немного* отделено от первого.

Теорема 16.1 *Зигзаг-произведение спектрального* $(n, D, 1-\alpha)$*-экспандера* G *и спектрального* $(D, d, 1-\beta)$*-экспандера* H *является спектральным экспандером с параметрами* $(nD, d^2, \leqslant 1-\alpha\beta^2)$.

Лемма 16.1 *Пусть* A *— матрица блуждания по некоторому графу* (*первое собственное число равно* 1), *и все остальные собственные числа по модулю не превосходят* $1-\delta$. *Тогда* A *можно представить в виде* $(1-\delta)B+\delta J$, *где* B *— матрица с нормой не больше* 1, *а* J *— матрица полного перемешивания* (*все матричные элементы равны* $1/$[*число вершин*]).

Доказательство леммы: вычитая из A матрицу δJ, мы уменьшаем первое собственное число (единицу) на δ, а остальные не трогаем, так что все собственные числа становятся не больше $1-\delta$ по модулю. Таким образом, у разности $(A-\delta J)$ норма не превосходит $(1-\delta)$, и лемма доказана.

Доказательство теоремы: Напомним, что матрицу зигзаг-произведения можно представить в виде $\tilde{H}\tilde{G}\tilde{H}$, где матрица $\tilde{H}$ (размера $nD \times ND$) есть матрица графа, составленного из рёбер, соответствующих графу H (граф из пунктирных линий на стр. 3), а $\tilde{G}$ есть матрица из рёбер, соответствующих графу G (граф с теми же вершинами, но с рёбрами из сплошных линий на стр. 3). Напоним, что в $\tilde{H}$ каждый столбец и каждая строка содержат d единиц, а в $\tilde{G}$ — ровно одну единицу. Важно помнить, что матрица $\tilde{G}$ задаёт перестановку на множестве вершин, и её норма равна единице.

Воспользуемся леммой 16.1 и представим матрицу $\tilde{H}$ в виде $\beta\tilde{J}+(1-\beta)B$, где $\tilde{J}$ есть сумма матриц «полного перемешивания» для каждого из n «облаков» нашего зигзаг-произведения, а B — некоторая матрица с нормой, не превосходящей 1. Таким образом, матрица графа оказывается представлена а виде

$$\tilde{H}\tilde{G}\tilde{H} = (\beta\tilde{J} + (1-\beta)B) \cdot \tilde{G} \cdot (\beta\tilde{J} + (1-\beta)B).$$

Раскрывая скобки, преобразуем матрицу графа в сумму

$$\beta^2\tilde{J} \cdot \tilde{G} \cdot \tilde{J} + (1-\beta^2)C,$$

где C — некоторая матрица с нормой, не превосходящей 1.

Теперь рассмотрим более внимательно произведение $\tilde{J}\cdot\tilde{G}\cdot\tilde{J}$. Эта матрица соответствует следующему трёхшаговому блужданию по графу: начав с некоторой вершины v, мы переходим к случайно (равномерно) выбранной вершине v' в том же облаке (умножение на $\tilde{J}$), затем от v' переходим по «сплошному» ребру в вершину v'' в соседнем облаке (умножение на $\tilde{G}$), и затем ещё раз переходим к некоторой v'' — случайно выбранной соседке

v' по облаку (ещё одно умножение на $\tilde{J}$). Заметим, что описанное блуждание совпадает можно описать умножением на матрицу $J \otimes G$. В самом деле: мы переходим из текущего облака в соседнее по случайно выбранному сплошному ребру, а затем выбираем случайную координату внутри нового облака. Но второе собственное число матрицы $J \otimes G$ легко вычислить: оно равно второму собственному числу G, т.е., $(1-\alpha)D$. Следовательно, второе собственное число $\tilde{H}\tilde{G}\tilde{H}$ не превосходит

$$\beta^2(1-\alpha) + (1-\beta^2) = 1 - \alpha\beta^2,$$

и теорема доказана.